

サイクロイド曲線と振り子時計.

2021年6月14日 梅原雅顕 (東工大・情報理工学院, 数理・計算科学系)

サイクロイドは、円が数直線上を滑ることなく転がるときの円周上の1点が描く点の軌跡である(図1左). それを折り返して下に凸になるよう配置し(図1右), その上に玉を置くと転がって最下部に到達する時間は, 最初に玉を置く位置によらない. また, サイクロイドの法線(つまり接線に直交する線, 図1右の緑の線)を描くと, そこに浮かび上がる曲線は, 元のサイクロイドを平行移動したものとなる. この2つの性質を利用して, ホイヘンスは17世紀に振り子時計を考案した. この講義では, ホイヘンスの仕事に焦点をあてつつ, サイクロイド曲線のもつ不思議な性質を紹介する.

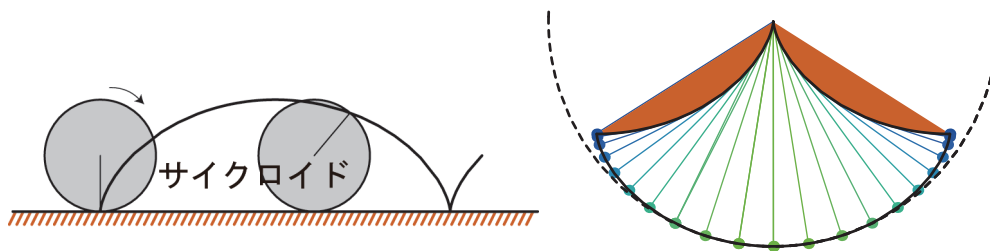


図1. サイクロイド曲線と振り子時計

1. 助変数表示された平面曲線

この講義で扱う曲線は, すべて助変数表示を用いて表わす. 助変数 t の動く範囲は $\alpha \leq t \leq \beta$ ($\alpha < \beta$) であるとし, t を固定するごとに平面上の点

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

を指定することで平面曲線が与えられているとせよ. これは, 物理的には, 時刻 t における平面上の点の位置 $\gamma(t)$ を与えるものと解釈できる.

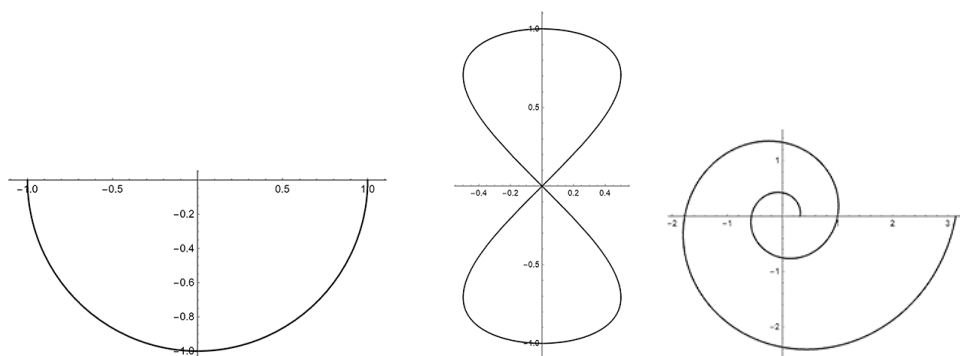


図2. 4つの曲線の例 (γ_3 以外は $a = 1$, γ_3 では $a = 1.2$)

具体例を紹介する(但し a は正の数とする). まず,

$$\gamma_1(t) := a \left(\sin(t/a), -\cos(t/a) \right) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

は, 下に凸な半円(図2左)を与える. この用に円を助変数表示をすると, その微分

$$\gamma_1'(t) = \left(\cos(t/a), -\sin(t/a) \right)$$

と, 大きさ1のベクトルとなる. 一方,

$$\gamma_2(t) := a(\sin t \cos t, \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

は、8 の字曲線 (図2 中央右) を表わす. また

$$\gamma_3(t) := a^t(\sin t, \cos t) \quad (-2\pi \leq t \leq 2\pi)$$

は対数うずまき線 (図2 右) を表わす.

2. 曲線の長さ

平面曲線

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

の微分 (速度ベクトル) は

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

である, 但し

$$x' := \frac{dx}{dt} \quad y' := \frac{dy}{dt}$$

とする. ベクトル $\gamma'(t)$ の大きさ $v(t)$ は, $\gamma(t)$ が時刻 t の平面上の点の位置と思ったときは「速さ」とみなすことができ, ベクトルの内積を用いて計算すると,

$$(v(t) =) \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

となる. したがって $\gamma'(t)$ を 90° 半時計回りに回転させて, 大きさを 1 にしたベクトル

$$(2.1) \quad \mathbf{n}_{\text{左}}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}(-y'(t), x'(t))$$

は左向き単位法線ベクトルを与える. 曲線の長さ (道のり) は, 「速さ」を積分したものだから,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

で与えられる. 特に

$$s(t) := \int_{\alpha}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du$$

は, 時刻 α から t ($\alpha \leq t \leq \beta$) までの曲線の長さを与える. この関数を弧長関数という. 関数 $s(t)$ は, 一般には, 簡単な関数を用いて表示されるとは限らないが, 先に紹介した曲線 $\gamma_1(t)$ と $\gamma_3(t)$ の場合は, それぞれ

$$s_1(t) = t, \quad s_3(t) = \frac{1 + (\log a)^2}{\log a}(-1 + a^t)$$

で弧長関数を与えられる. γ_2 については, 弧長関数を簡単な関数で表わすことはできない.

3. 曲率・曲率半径・曲率円

$\gamma(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) によって助変数表示される平面曲線を, 時刻 t において, もっともよく近似する直線は「(曲線の)接線」である. 同様の考え方で, 時刻 t において, 平面曲線をもっともよく近似する円のことを曲率円という.

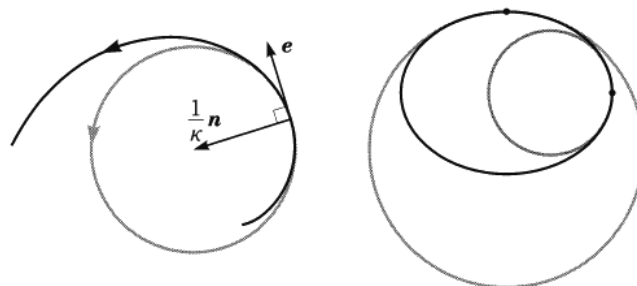


図 3. 「曲率円 (左)」と「楕円の最大曲率円と最小曲率円 (右)」, (図は [1] から転載)

曲率円の半径 R を**曲率半径**といい、その逆数に符号をつけて曲率円が、曲線 $\gamma(t)$ の進行方向左手にあるとき $1/R$ とし、進行方向右手にあるとき $-1/R$ としたものが、曲線の**曲率**という。その値は、

$$(3.1) \quad \kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

となる ([1, 14 頁]). また、時刻 t における曲線 γ の**曲率円の中心**は

$$(3.2) \quad \sigma(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{n}_{\text{左}}(t)$$

で与えられる ([1, 15 頁]).

4. サイクロイドとは？

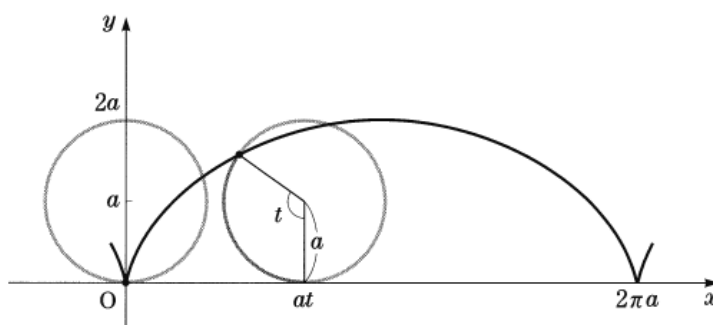


図 4. $a = 1$ のときのサイクロイド (図は [1] から転載)

今回のテーマは、**サイクロイド**という特別な平面曲線で、助変数表示

$$\gamma_{\text{cycloid}}(t) := a(t - \sin t, 1 - \cos t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

をもち、半径が a の円が数直線上を滑ることなく転がるときの円周上の 1 点が描く点の軌跡として特徴づけられる (半径 a の円に付随するサイクロイドとよぶ). この曲線には、**カusp** という (先端が尖った) 特異点が周期的に現れる. ただし、振り子時計に応用するときは、下に凸な曲線を扱うので、 x -軸に関して折り返し、助変数 t を $t + \pi$ に変更し $t = 0$ が、サイクロイドの最下部となるように調節し、かつ第 2 成分の定数項を取り除いた曲線

$$(4.1) \quad \gamma_0(t) := a(t + \sin t, -\cos t) \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

を考えて、これを (標準的な) **下に凸なサイクロイド**とよぶことにする. この曲線を描くと下図のようになる.

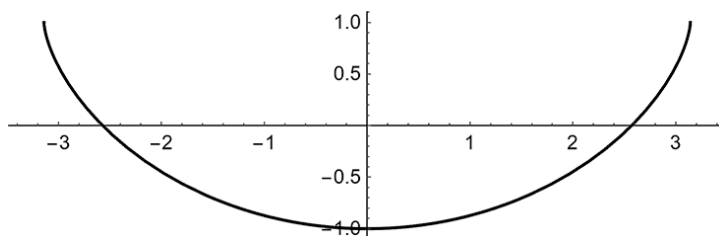


図 5. $a = 1$ のときの下に凸なサイクロイド

この曲線の 1 周期分 $-\pi \leq t \leq \pi$ の長さを求めてみよう.

$$\gamma'_0(t) = a(1 + \cos t, \sin t)$$

であるから、倍角の公式 「 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ 」 を用いると

$$\gamma'_0(t) \cdot \gamma'_0(t) = a^2(1 + \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = 2a^2(1 + \cos t) = 4a^2 \cos^2 \frac{t}{2}$$

を得る. したがって, 弧長関数は

$$(4.2) \quad s(t) = \int_0^t 2a \cos \frac{u}{2} du = \left[4a \sin \frac{u}{2} \right]_{u=0}^{u=t} = 4a \sin \frac{t}{2}$$

となる. 特に

$$s(\pi/2) - s(-\pi/2) = 4a - (-4a) = 8a$$

つまり, 1周期分のサイクロイドの長さは, 半径 a の円の半径の8倍となる.

5. 曲線に沿った質点の運動方程式

この節では質点という用語を用いるが, これは力学で使われる概念で, 質量だけあって大きさのない点状の物体, つまり物体の運動や位置を考えると, 物体の重心に全質量が集まった点を物体そのものと見なしたものである. いま, 平面曲線の助変数表示

$$\gamma(t) \quad (-a \leq t \leq a)$$

は, 時刻 t における質点の位置を与えているものとせよ. さらに, $t=0$ は, この質点の運動の最下点であるとし, $\gamma(t)$ の描く軌跡を Γ とすると, Γ は, 最下点を通る鉛直な線に対して左右に対称な形の自己交叉のない下に凸な曲線であったと仮定する.

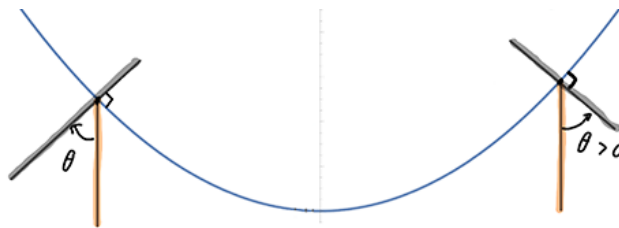


図 6. 下に凸な曲線と, 鉛直方向と法線のなす角 θ

Γ は, 質点 $\gamma(t)$ の軌跡であるが, 見方を変えて, Γ があらかじめ与えられており, 質点 $\gamma(t)$ の運動は, 曲線 Γ の上に制限されているとしよう. 物体の運動が Γ に制限されるという状態は Γ の垂直方向に働く重力と, 物体に働く別の力 (張力あるいは抗力) が釣り合っている状態を意味する. そのようなときには, 質点の運動を記述するには, Γ の接線方向に働く力のみを考えればよい, そして, 曲線 Γ に沿う 1次元の運動と思って運動方程式を立てればよい. (曲線を曲がった数直線と思い, 目盛りは弧長に取っている, という設定である.) $\gamma(t)$ は, 時刻 t における物体の座標であるから, 弧長関数 $s(t)$ が時刻 t における質点の Γ の基準点からの符号付き距離を与えている. ($s(t)$ が負 (正) ならば, 基準点から Γ に沿って長さ $|s(t)|$ だけ過去 (未来) にある点とみなす.)

Γ 上における物体の速度は $s' := ds/dt$ であり, 物体の加速度は $s'' := d^2s/dt^2$ である. いま, $\theta(s)$ は, 質点が s の位置にあるときの鉛直方向と曲線の下向きの法線方向とのなす (反時計回りに測った) 角度 (単位はラジアン) とする. ここで角度 $\theta(s)$ が正のときは, 質点は Γ の最下点より右にあり, $\theta(s)$ が負のときは, 質点は Γ の最下点より左にある. g を重力加速度, m を質点の質量とすると $mg|\sin \theta(s(t))|$ が重力の曲線の接線方向に寄与する力の大きさとなる. 重力の寄与は, 常に質点を最下点方向に戻すように働くので, マイナスがついて

$$-mg \sin \theta(s(t))$$

が, 質点への力の寄与となる. よって $-mg \sin \theta(s(t)) = ms''(t)$ が運動方程式ということになるが, 質量 m で約分して

$$(5.1) \quad -g \sin \theta(s(t)) = s''(t)$$

と簡約化される. つまり物体の運動は, その質量には依存しない.

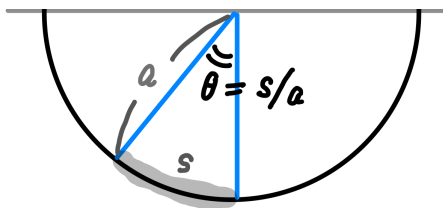


図 7. 半径 a の下向き半円のときの角度 θ

6. 単振り子の場合

まず Γ が半径が $a > 0$ の (円の下半分を与える) 半円で γ_1 によって助変数表示されているとする (図 2 左参照). a を正の数とし, 式 (4.1) で与えた下に凸な半円を考える. ただし, 曲線を描く助変数は, その曲線を動く質点の運動とは無関係なので,

$$\gamma_1(s) := a(\sin(s/a), -\cos(s/a)) \quad (-\pi/2 \leq s \leq \pi/2)$$

で表示しておく. この Γ を床と思って, ある場所に玉をおき, 手を放した後の物体の運動を調べる. 先に指摘したように s は円の弧長関数そのものであり, $\theta(s) = s/a$ が, 鉛直方向と, 円の下向きの法線方向とのなす角度である. したがって, 運動方程式 (5.1) は,

$$(6.1) \quad -g \sin\left(\frac{s(t)}{a}\right) = s''(t)$$

に帰着する. これは, よく知られる単振り子の運動方程式である.

ガリレイ (Galileo Galilei, 1564-1642) は,

- 振幅が小さいときの振り子の振幅の周期は, 重りを手から離す位置によらず (ほぼ) 一定である

ことを発見したが, 彼の発見を, この運動方程式を使って説明することができる. 正弦関数 $\sin x$ は, 以下の無限級数¹ で計算できることが知られている ([3, 48 頁]),

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!} + \cdots$$

この等式を $n = 1$ で打ち切ると,

$$(6.2) \quad \sin x \approx x$$

なる近似が得られる. 打ち切ったときの次の項は x^3 の項なので, x が小さいときは, かなりよい近似を与える. 実際, $|x|$ が $\pi/6 = 0.52$ 以下ならこの近似の誤差は ± 0.02 程度で収まる. さて, この近似式 (6.2) を使うと, 運動方程式 (6.1) は,

$$(6.3) \quad -\frac{g}{a} s(t) = s''(t)$$

となる. ここで, 以下の事実を用いる.

Fact 1. b を正の定数とするとき,

$$(6.4) \quad -b^2 s(t) = s''(t)$$

を満たす関数 $s(t)$ の一般形は

$$(6.5) \quad s(t) = c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)$$

で与えられる, ただし c_1, c_2 は定数である.

(証明) 実際, (6.5) が (6.4) を満たすことは簡単に確かめられる. 逆に (6.4) を満たす $s(t)$ はこの形のものに限ることについては [3, 93 頁] をみよ. □

¹ 「 $x = 0$ におけるテイラー展開」あるいは「マクローリン展開」という.

この事実から、(6.3) を満たす $s(t)$ の一般形は

$$s(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right)$$

となる。したがって円運動の周期 T_0 は

$$T_0 := 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

ということになる。ただし、これはあくまで近似式である。具体例として、糸の長さが 1 メートルの場合を考えると

$$T_0 = 2\pi\sqrt{1.0/9.8} \approx 2.01$$

となるが、これは、本当の周期 (つまり振り子が元の位置に戻るまでの時間) の概算でしかない。

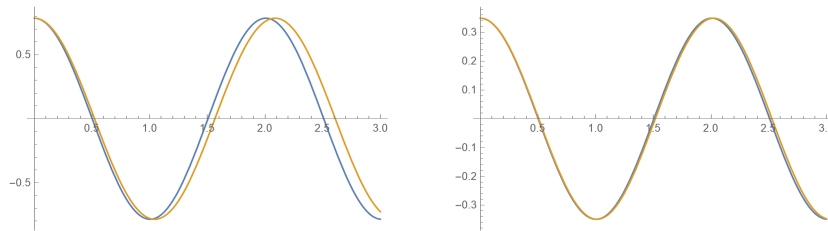


図 8. 45° と 20° の角度から重りを落としたときの角度関数の変化

実際、微分方程式 (6.1) の厳密解は、楕円積分に関連した特殊関数を使って表わされ、それを用いて本当の周期 T を計算すると、その値は、 T_0 より少し大きくなる。図 8 は、重りを落とす角度が 20° のときと 45° のときの (6.1) の解 $s(t)$ のグラフである。このグラフから、重りを落とす角度が 20° のときは、 T の値はほぼ、この T_0 に一致するが 45° のときは本当の周期 T と T_0 の間に約 0.1 秒の差が生じることが読み取れる (正確に T を求める方法については下記の注意参照)。

注意 2. 物体の運動が曲線 Γ に束縛されているとき、その周期 T は、力学的エネルギー保存の法則を利用して、曲線 Γ の 1 階微分のデータと、物体の初期位置の情報から、積分を使って表わすことができる ([1, 218 頁] 参照)。 Γ が半径 1 メートルの円るとき、その積分を計算機を使って数値計算を行うと、重りが鉛直方向となす角度が 45° と 30° のとき、単振り子の本当の周期 T は、それぞれ 2.09 (秒) と 2.04 (秒) である。

7. 本当に周期を一定にするにはどうすればよいか？

a を正の数とし、式 (4.1) で与えた下に凸なサイクロイド γ_0 (図 5) を考える。ただし、曲線を描く助変数は、その曲線を動く質点の運動とは無関係なので、サイクロイドの式を

$$\gamma_0(u) := a(u + \sin u, -\cos u) \quad (-\pi \leq u \leq \pi)$$

で表示しておく。 $-\pi \leq u \leq \pi$ の範囲を u が動いたときの $\gamma_0(u)$ の軌跡を Γ とする。この Γ_0 を床と思って、ある場所に玉をおき、手を放した後の物体の運動を手を放した時刻を 0 として t 秒経過後の物体の運動を調べる。いままで、曲線のパラメータ t を用いていたときの微分は、プライムを用いてきた、つまり

$$' = \frac{d}{dt}$$

と記してきた。これと区別するため、助変数 u についての微分は、ドットを用いる。例えば

$$\dot{\gamma}_0(u) = (1 + \cos u, \sin u)$$

である。 **ホイヘンス** (Christiaan Huygens, 1629-1695) は、以下のサイクロイドの等時性を発見した。

- Γ_0 を床と思って、ある場所に玉をおき、手を放すとき、最下部に到達する時間は玉を置く位置に依存しない。

前節で導出した式を用いて、これを確認してみよう。下に凸なサイクロイド γ_0 の微分は

$$\dot{\gamma}_0(u) = a(1 + \cos u, \sin u)$$

で $\dot{\gamma}_0(u) \cdot \dot{\gamma}_0(u) = 4a^2 \cos^2(u/2)$ であることはすでに示した。曲線の下向きの単位法線ベクトルが、鉛直方向の角度 $\theta(u)$ を用いて

$$\mathbf{n}(u) = (\sin \theta(u), \cos \theta(u))$$

と書けていたとすると、(2.1) により

$$(7.1) \quad \mathbf{n}(u) = -\mathbf{n}_{\text{左}}(u) = -\frac{(-\sin u, 1 + \cos u)}{2 \sin(u/2)} = \left(\sin \frac{u}{2}, -\cos \frac{u}{2} \right)$$

が成り立ち、(4.2) により

$$\sin \theta(u) = \sin(u/2) = \frac{s(u)}{4a}$$

を得る。 $u = u(t)$ が、質点の時刻 t における助変数 u の値を表わしているとし

$$s(t) := s(u(t))$$

と略記すると、(5.1) により Γ_0 上の質点の運動方程式は

$$(7.2) \quad -g \frac{s(t)}{4a} = s''(t)$$

となる。Fact 1 より、これを満たす s の一般形は

$$s(t) = c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{a}} x \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{a}} x \right)$$

で与えられ、その周期は

$$(7.3) \quad T := 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

となる。これは糸の長さが $4a$ の単振り子の「おおよその周期」と同じである。「半径が $4a$ の円」とサイクロイドを比べたのが図 1 右で、この円がサイクロイドのよい近似²になっているのがわかるだろう。

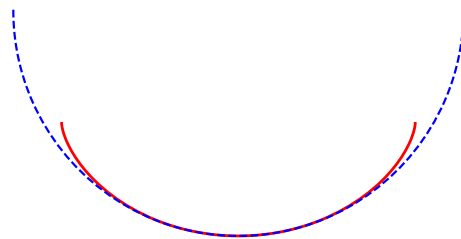


図 9. 半径 4 の半円 (青い点線) と、下に凸な ($a = 1$ の) サイクロイド (赤) との比較

8. 振り子にサイクロイドを描かせるにはどうしたらよいか?

与えられた軌道を描く振り子を生設計するにはどうしたらよいか。ホイヘンスは、この問題を以下のように解決した。

- 振り子の根元にあて板をつけて、振り子の運動を制御する。そのあて板を工夫してサイクロイド曲線を描くようにすればよい。

与えられた曲線 C に巻きつけられた糸を、たわまずに引っ張りつつ放していくとき、糸の先端部分の軌跡として得られる曲線 Γ を C の伸開線という。天井が C の形をしていると、振り子は C の伸開線を描く。

²読者がテイラー展開のことを知っていれば、曲線を $y = f(x)$ のグラフで表わしたとき、下に凸なサイクロイド Γ_0 と半径 $4a$ の円において、最下部における 3 階までのテイラー展開が一致する。2 階微分的一致で十分によい近似だが、それ以上に精密な近似になっているという意味で「よい近似」という表現を用いた。

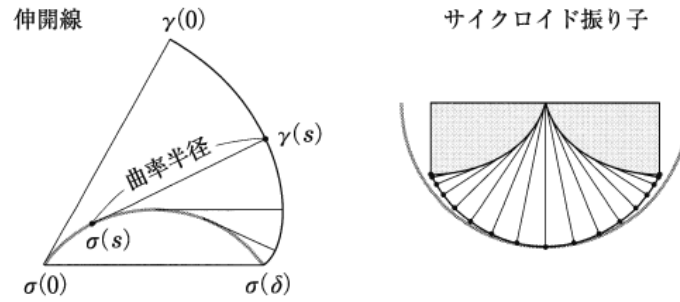


図 10. 伸開線とサイクロイド振り子 (図は [1] から転載)

いま伸開線の軌道を Γ とすると、その接線方向は、糸の方向に直交する。また、ほぐれた糸の長さは、糸の先端の点 (Γ 上にある) で、曲線 Γ を「最もよく近似する円」(つまり曲率円) の半径 (つまり曲率半径) の逆数 (つまり曲線の曲率の絶対値) となり、 Γ の曲率円の中心は、ほぐれていく糸の根元の点、つまり C 上の点となること知られている ([1, 付録 B-1] 参照)。この事実を要約すると以下ようになる。

- 曲線 C のその伸開線を Γ とする。このとき、 Γ の各点で、 Γ を最もよく近似する円 (曲率円) の中心の軌跡は、 C に一致する (図 (10) 参照)。

既に説明したように、 $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ ($a \leq t \leq b$) を曲線 Γ の助変数表示とすると、曲率は (3.1) で与えられ、曲率円の中心の軌跡である C の助変数表示は、(3.2) により

$$(8.1) \quad \sigma(u) = \gamma(u) + \frac{1}{\kappa(u)} \mathbf{n}_L(u)$$

で与えられる。この式に、実際に振り子に描かせたいサイクロイド曲線 (4.1) にあてはめてみよう。 $\gamma_0(t)$ の左向き単位法線ベクトルは、(7.1) より

$$\mathbf{n}_L(u) = \left(-\sin \frac{u}{2}, \cos \frac{u}{2} \right)$$

で与えられる。また、 $\gamma_0(t)$ の曲率は、(3.1) より

$$\kappa(u) = \frac{1}{2a\sqrt{2 + \cos u}} = \frac{1}{2a \cos(u/2)}$$

となるので、下に凸なサイクロイド $\gamma_0(u)$ の曲率円の中心は、(3.2) を用いて計算すると、

$$\sigma(u + \pi) = \gamma_0(u) + a(\pi, 2)$$

となり、振り子の「あて板」となるべき、サイクロイドの曲率中心の軌跡 C_0 は、

$$C_0 := \{\sigma(u); -\pi \leq u \leq \pi\}$$

は、最初に与えたサイクロイド曲線の軌道

$$\Gamma_0 := \{\gamma_0(u); -\pi \leq u \leq \pi\}$$

を平行移動したものになっている。(座標の設定は、縦に 1 だけずらしているが) 2つの曲線 C_0 と Γ_0 を一緒に描いたのが図 10(左)で、 Γ_0 の中央真上に C のカस्प点 O があり、 Γ_0 の最下点との距離は $4a$ となる。逆さのサイクロイドの最下点から、カस्पまでの長さも同じく $4a$ なので、糸が完全にあて板に巻き付いた状態は C_0 の両側の最下点 (それは Γ_0 の左側あるいは右側のカस्प点に一致) に糸の先端にあることになる。また、糸が完全にあて板 C_0 から離れた状態が Γ_0 の最下点に糸の先端がある場合である。つまり、天井にあて板を C_0 にし、 C_0 のカस्प点 O から糸を吊して、糸に重りをつけて振幅させると、糸が C_0 に巻き付くため、重りの運動は、サイクロイド Γ_0 上に束縛される。

図 11(右) はサイクロイドの法線 (青い線) を描いたもので、青い線が重なって浮かび上がった曲線 (青い線の包絡線) が、 C に一致し、黒い線が Γ_0 で、振り子の先端 (重り) の軌道である。つまり、図 11(右) は、図 11(左) と重ね合わせることができる。図 11(右) において、ある時刻における C に巻きついていない部分の振り子の糸は、この図のような青い直線上の線分になっており、図 11 は図 10(右) を拡大したものと見なすこともできる。

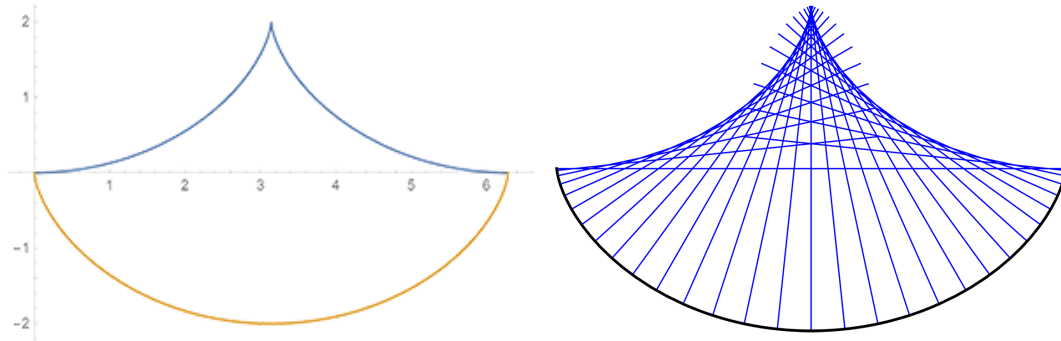


図 11. 曲線 C (青) と曲線 Γ (橙) (左図) と, サイクロイドの法線の包絡線 (右図)

こうして, (空気抵抗を無視すれば) 減衰しても周期が変わらない振り子が作れることになる. ホイヘンスは, 実際, この考察に基づき, 1656 年, 振幅時の誤差を両脇のサイクロイド状のあて板で補正する振動装置を装着し, 誤差が一日に数分程度の振り子時計を発明した³.

9. サイクロイドのもう 1 つの特別な性質

ここまでの議論は, 振り子の話ではあったが, 物体の運動がサイクロイドに束縛されれば, 同じことが成り立つので, 結局, 以下のことが成り立つ.

- 下に凸なサイクロイド状の床があると, どこから玉を転がしても, 最下点に到達する時間が同じである,

特に, 玉を下に凸なサイクロイドの最高点から転がしたとき, 移動距離が最も長いので, このときが一番の速さで最下点に到達することになる. この事実を発展させて, ヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli, 1667-1748) は, 1696 年に以下のことを証明した.

- ある点 A から, それより高くない点 B を平面曲線で結び, その曲線に沿って玉を転がすとき, 最も短時間で A から B に到達する経路は, A を最高点とし, B を通る下に凸なサイクロイドである (サイクロイドの最速降下性).

この事実は, 今回の話の中で最も深いもので, 残念ながら高校レベルの数学での説明は難しい. その証明は [1, §18] をみよ. 具体例として, 東京と大阪の間のサイクロイドによる移動時間を算出してみよう.

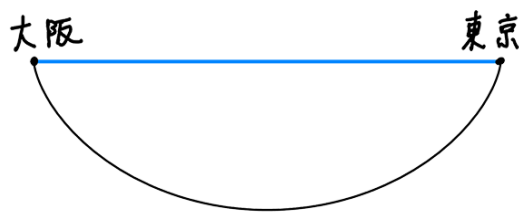


図 12. 東京と大阪をサイクロイドで結ぶ

東京と大阪の間の直線距離は約 403km である. すると, この 2 点を最高点 (つまり端点) とする下に凸なサイクロイドの定数 a は $2\pi a = 403$ を満たすので

$$a \approx 64139.4$$

である. 重力加速度を $g = 9.8$ とすると, 周期の半分の値

$$2\pi\sqrt{a/g} \approx 508.05(\text{秒})$$

³しかしながら空気抵抗の影響で, サイクロイド振り子でも誤差は発生し, その後の振り子時計の発展過程において, 単振り子に力を与え続け, さらに速度を調節する装置 (「脱進機」) が発明され, サイクロイドは使われなくなった. 詳しくは 文献 [4] 参照. なお, ホイヘンスの振り子時計発見にまつわる話が [2] に記されている.

が、一方から他方へ到達する時間となるが、これを「分」に換算すると約8分半で、東京-大阪間が移動できることになる。ただし、そのサイクロイド状のトンネルは深さが $2a$ つまり、地下約 128 km が最深部ということになる。

10. まとめ (サイクロイドの性質)

本講義では、以下の4つの重要なサイクロイドの性質を紹介した。

- (0) 円を転がしたときの円上の一点の軌跡,
- (1) 特異点 (カusp) をもつ,
- (2) 等時性,
- (3) 法線の包絡線が、自身と同じ形のサイクロイドになる,
- (4) 最速降下性.

APPENDIX A. 下に凸な曲線に玉を置いたときの最下部に到達するまでの時間

これは、この冊子の付録である。本文中で述べた方法では、単振り子の正確な周期を計算することはできない。ここでは力学的エネルギー保存の法則を用いて、単振り子の正確な周期を計算すると共に、サイクロイド振り子の周期を与える式 (7.3) の (エネルギー保存の法則を用いた) 別証明を与える。結果として、単振り子とサイクロイド振り子の振幅による周期の差をグラフで表わし、比較することができる。

xy -平面上で下に凸な曲線

$$\gamma(u) = (x(u), y(u)) \quad (-c \leq u \leq c)$$

を考える。曲線の進行方向左手が「上」を指すように助変数 u をとり、さらに $u = 0$ で $\gamma(0)$ が最下部にあるとする。いま、 $-c \leq u \leq c$ の範囲を u が動いたときの $\gamma(u)$ の軌跡を Γ とする。この Γ を床と思って、ある場所に玉をおき、手を放した後の物体の運動を手を放した時刻を 0 として t 秒経過後の物体の運動を調べる。

出発した質量 m の物体が、重力のみにしたがって曲線に沿って、 $\gamma(c)$ まで移動した場合に要する時間 T を計算する。パラメータ u 自体が時間の関数であるので $u(t)$ と表示する。 $y_0 := y(0)$ が最下部の高さであるから物体の速さを $V(t)$ とすると、力学的エネルギー保存の法則により

$$\frac{mV^2}{2} + mg(y(t) - y_0) = K \quad (\text{一定})$$

である。いま、物体は、曲線 $\gamma(u)$ の向きに同調する方法に移動しているとせよ。 $t = c$ において、物体の速さが零になったとすると

$$K = mg(y(c) - y_0)$$

となる。一方

$$|V(t)| = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} = \sqrt{(dx/du)^2 + (dy/du)^2} \frac{du}{dt}$$

であるから

$$\frac{dt}{du} = \pm \frac{1}{\sqrt{2g(y(c) - y(0))}} \sqrt{(dx/du)^2 + (dy/du)^2}$$

であることがわかる。したがって、この運動によって、物体が、元の位置に戻るまでの時間、つまり周期は

$$T := \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^c \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{|y(c) - y|}} du$$

となる。これは、物体が真下から最高点へ到達する時間の4倍である。

まず、この式を γ が半径 $a = 1$ の円の場合にあてはめよう。

$$\gamma_1(u) := (\sin u, -\cos u)$$

であるから

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \gamma_1 \cdot \gamma_1 = 1$$

となり $u = \theta (> 0)$ が最高点とすると

$$T := \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos u}} du = \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos u}} du$$

となる。糸の長さが 1 メートルの場合なので、この場合は

$$T(\theta) = \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos u}} du$$

である。この関数は、簡単な関数で表わすことはできないが c が、玉を放すときの角度であり、 0 から $\pi/2$ までの範囲を動く。§6 で求めた近似値

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \approx 2.01$$

をオレンジの線にして、横軸に c を、縦軸に T をとってグラフにすると以下のようなになる。緑の線は、周期の最長点 2.37 の目印である。

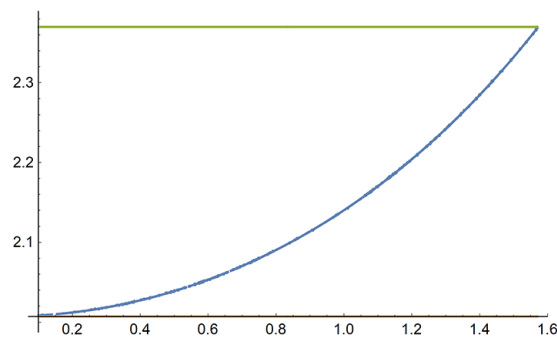


図 13. 糸の長さが 1m の円振り子の周期 (単位は秒), 横軸は, 玉を置く場所の鉛直方向との角度 (ラジアン)

今度は, T の式をサイクロイドにあてはめてみよう. $a = 1$ のときのサイクロイド

$$\gamma_0(t) = (t + \sin t, -\cos t)$$

を考える.

$$\gamma'(t) = (1 + \cos t, \sin t)$$

なので

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \gamma' \cdot \gamma' = 2a^2(1 + \cos u)$$

であり, 最高地点が $u = \theta$ のときの周期は

$$T = \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^\theta \sqrt{\frac{\gamma'(u) \cdot \gamma'(u)}{a(\cos u - \cos \theta)}} du = \frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{g}} \int_0^\theta \sqrt{\frac{(1 + \cos u)}{\cos u - \cos \theta}} du$$

となる. したがって (7.3) で与えた

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

を, (別証明として) エネルギー保存則から導くには, 以下の補題を示せばよい.

補題 3.

$$(J :=) \int_0^\theta \sqrt{\frac{(1 + \cos u)}{\cos u - \cos \theta}} dt = \pi$$

(証明) これを示すのに積分変換

$$1 + \cos u = v$$

を用いる. 実際 $u \mapsto 1 + \cos t$ は, $t = 0 \sim \pi$ まで単調現象であるから座標変換として有効である. そして

$$dv = -\sin u du$$

である. いま $\alpha := 1 + \cos \theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1 + \cos u}{\cos u - \cos \theta}} du &= -\sqrt{\frac{1 + \cos u}{(\cos u - \cos \theta) \sin^2 u}} dv \\ &= -\sqrt{\frac{1 + \cos u}{(\cos u - \cos \theta)(1 - \cos^2 u)}} dv \\ &= -\sqrt{\frac{1}{(\cos u - \cos \theta)(1 - \cos u)}} dv \\ &= -\sqrt{\frac{1}{(v - \alpha)(2 - v)}} dv\end{aligned}$$

であり,

$$y|_{u=\theta} = \alpha, \quad y|_{u=0} = 2$$

であるから

$$J := \int_{\alpha}^2 \frac{1}{\sqrt{(v - \alpha)(2 - v)}} dv$$

となり, 下記によく知られる積分の公式から結論が得られる. □

以下の事実は, 解析学などの本を参考にすれば証明できるので, 演習問題としておく.

Fact 4. $a < b$ のとき

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t - a)(b - t)}} = \pi$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] 梅原・山田共著, 曲線と曲面 -微分幾何的アプローチ- (改訂版), 裳華房 (2002),
- [2] S. G. ギンディキン (著), ガリレイの17世紀—ガリレイ、ホイヘンス、パスカルの物語, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1996).
- [3] 吹田・新保共著, 理工系の微積分学 学術図書出版, (1987).
- [4] 礒田正美, Maria G. Bartolini Bussi 編, 田端毅, 讚岐勝, 礒田正美著, 曲線の辞典, 共立出版 (2009).