曲線と曲面——微分幾何的アプローチ 改訂版（裳華房）
改訂第 2 版 正誤表

梅原雅顕・山田光太郎

2022/07/14

青字は修正対象箇所，赤字は修正後の文章.

■第 I 章

5 ページ，一番下（アステロイドの助変数表示）:

$x(t) = a^3 \cos^3 t,\ y(t) = a^3 \sin^3 t \Rightarrow x(t) = a \cos^3 t,\ y(t) = a \sin^3 t$

7 ページ 8 行目:

$\gamma(t) := a^3(\cos^3 t, \sin^3 t) \Rightarrow \gamma(t) := a(\cos^3 t, \sin^3 t)$

19 ページ，下から 2 行目:

さらにヤコビ行列式は ⇒ さらに，φ のヤコビ行列式は

27 ページ 1 行目:

n 次の正方行列 A は，${}^tAA = A{}^tA = I$（I は n 次の単位行列）をみたすとき，**直交行列**とよばれる.
⇒ n 次の正方行列 A は，${}^tAA = A{}^tA = I$（I は n 次の単位行列）をみたすとき，すなわち ${}^tA$ が A の逆行列であるとき**直交行列**とよばれる.

30 ページ，図 3.1 のキャプション:

正則ホモトピー同値類 ⇒ 正則ホモトピー同値類の代表元

31 ページ，一番下の 3 行:

定理 3.2 単純閉曲線の回転数は 1 または -1 である.
[**証明**] 直感的にはいかにも明らかそうな主張であるが，証明は単純ではない．いま
x 軸に平行な直線をはるか下の方から上向きに平行移動して，曲線に

⇒ **定理 3.2** 単純閉曲線の回転数は 1 または -1 である.
単純閉曲線が円と同値であることは，この定理と定理 3.3 より従う.
[**証明**] x 軸に平行な直線をはるか下の方から上向きに平行移動し，曲線に

40 ページ，2 行目の左辺:

$\tilde{s}(s,t) \Rightarrow \tilde{w}(s,t)$

41 ページ 10 行目:

($a > 1$ は定数) ⇒ ($a > 1$ は定数，$\theta \in \boldsymbol{R}$)

45 ページ，脚注 3:

写像 $z \mapsto 1/\bar{z}$ で与えられる．⇒ 写像 $z \mapsto 1/\bar{z}$ （$\bar{z}$ は z の共役複素数）で与えられる．

46 ページ，下から 8 行目:

2 次の接触をしている．T は微分同相であり，

⇒ 2 次の接触をしている．T はその点の近くでの微分同相であり，

49 ページ，下から 5 行目:

定理 4.5 より $\gamma(t) \in \overline{D}_t \subset D_s$ となるが，これは $\gamma(s) \notin D_s$ に矛盾する．

⇒ 定理 4.5 より $\gamma(s) \in \overline{D}_s \subset D_t$ となるが，これは $\gamma(t) \notin D_t$ に矛盾する．

50 ページ 3 行目:

対数うずまき線のなす角は一定である．⇒ 対数うずまき線のなす角は，半直線によらず一定である．

52 ページ 5 行目:

$\kappa(s) = |\gamma''(s)| \geqq 0$ ⇒ (削除)

54 ページ 7 行目:

弧長によってパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$

⇒ 弧長でパラメータづけられた，$\kappa > 0$ となる空間曲線 $\gamma(s)$

■第 II 章

65 ページ，1–4 行目:

が曲面の接平面となり，p_u, p_v の両方に直交し，次の式で定義される向きの単位ベクトル

$$\nu := \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} \tag{6.8}$$

が曲面の**単位法線ベクトル**となる．

⇒ が曲面の接平面となる．p_u, p_v の両方に直交する単位ベクトルは $\pm$ の任意性があるが，ここでは

$$\nu := \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} \tag{6.8}$$

を曲面の**単位法線ベクトル**とする．

65 ページ，5–9 行目（差し替え）:

いま，uv 平面上の 1 点 (u_0, v_0) に対応する曲面上の点 $p(u_0, v_0)$ の座標を (x_0, y_0, z_0) とし，この点における単位法線ベクトルを $\nu = (a, b, c)$ と成分表示すると，曲面の接平面の方程式は

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

で与えられる．

⇒ たとえば, 関数 $z = f(x, y)$ のグラフの単位法線ベクトルは

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1)$$

で与えられる．

65 ページ，下から 7 行目:

$p_v = 0 \Rightarrow p_v = \mathbf{0}$ (太字)

66 ページ，6–7 行目:

曲面 $p(u, v)$ が与えられているとし，D をこの助変数表示が定める領域とする．このとき，領域 D が

⇒

曲面 $p(u, v)$ に対して，この助変数表示が定める領域が有界閉領域 D を含むとする．このとき，D が

76 ページ 11 行目:

半径 a，高さ $2\pi b$ の円柱の側面積に等しい → 半径 b，高さ $2\pi a$ の円柱の側面積に等しい

79 ページ 6 行目:

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P \qquad \to \qquad AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

81 ページ 3 行目:

第二基本形式が座標変換でどのように変わるかを調べよう．

⇒

式 (6.8) で ν を定めたとき，第二基本形式が座標変換でどのように変わるかを調べよう．

81 ページ 4 行目:

（節末の問題 **4**）⇒ （§6 の問題 **4**）

81 ページ，12–14 行目:

負の座標変換に対しては $(u, v) \mapsto (v, u)$ と助変数の順序を入れ替えれば正
の座標変換にできるから，このことにより一般性を失うことはない．

⇒ ただし，単位法線ベクトル ν を座標の正負と無関係に定めた場合には，第二
基本形式は正負どちらの座標変換でも不変になる．

82 ページ 3 行目:

変換式 (7.13), (8.3) によって，行列 A の座標変換の公式

⇒ (7.13), (8.3), (8.4) の第 1 式により，A の座標変換の公式

83 ページ 9 行目:

負の座標変換では，ガウス曲率は不変で，

⇒ 負の座標変換では，ν を (6.8) 式のようにとると，ガウス曲率は不変で，

84 ページ 4 行目:

xy 平面 ⇒ 半径 1 の円柱面

84 ページ，15–18 行目:

単位法線ベクトルとして，$\nu = (1/a)p$ がとれる．すると第二基本形式は

$$II = -dp \cdot d\nu = -\frac{1}{a}dp \cdot dp = -\frac{1}{a}ds^2$$

と，第一基本形式 ds^2 に比例するため，ワインガルテン行列 A は，単位行列の $-1/a$ 倍となり，ガウス曲率は $1/a^2$ で平均曲率は $-1/a$ となる．

⇒　単位法線ベクトルとして，$\nu = -(1/a)p$ がとれる．すると第二基本形式は

$$II = -dp \cdot d\nu = \frac{1}{a}dp \cdot dp = \frac{1}{a}ds^2$$

と，第一基本形式 ds^2 に比例するため，ワインガルテン行列 A は，単位行列の $1/a$ 倍となり，ガウス曲率は $1/a^2$ で平均曲率は $1/a$ となる．

85 ページ，命題 8.5 の証明（差し替え）:

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ を列ベクトルとみなすと，その内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は行列の積として $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ と書ける（付録 A-3 の (A-3.1) 参照）．いま，p_u, p_v, ν を列ベクトルとみなしてできる 3 次正方行列 $P_1 := (p_u, p_v, \nu)$, $P_2 := (\nu_u, \nu_v, \nu)$ を考えると，第一，第二基本行列の定義から

$$ {}^tP_1P_1 = \begin{pmatrix} \widehat{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \qquad -{}^tP_1P_2 = \begin{pmatrix} \widehat{II} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}$$

が成り立つから，

$$-P_1^{-1}P_2 = -({}^tP_1P_1)^{-1}({}^tP_1P_2) = \begin{pmatrix} \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{II} & \mathbf{0} \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

すなわち

$$(\nu_u, \nu_v, \nu) = P_2 = -P_1\begin{pmatrix} \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{II} & \mathbf{0} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -(p_u, p_v, \nu)\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}$$

となり，結論を得る．□

85 ページ，12 行目と 14 行目:

$\begin{pmatrix} \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{II} & \mathbf{0} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{II} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}$

(太字)

90 ページ，問題 1:

証明せよ．⇒ 証明せよ（§7 の問題 **1** 参照）．

95 ページ 5 行目:

よって $\sigma''(s_0) = \kappa_n(s_0)\nu$ となる ⇒ よって $\sigma''(s_0) = \kappa_n\nu$ となる

98 ページ 25 行目:

であたえられる．　⇒　であたえられる．とくに 2 つの主方向は法曲率の最大・最小を与える．

99 ページ 4 行目:

x 軸の方向が主方向であるから $M = 0$ となり，第二基本行列は対角行列になる．

⇒ x 軸の方向が主方向だから ${}^t(1,0)$ は A の固有ベクトルなので A は対角行列になる．

112 ページ 10 行目:

球面や輪環面（§6 の問題 1）などは $\boldsymbol{R}^3$ の有界閉集合

⇒ 球面や輪環面（§6 の問題 1）などは $\boldsymbol{R}^3$ の境界をもたない有界閉集合

120 ページ，一番下:

$(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^2 \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$

121 ページ 7 行目:

空間曲線 $\gamma(t)$ ⇒ 空間曲線 $\gamma(s)$

134 ページ，問題 1(1) の 2 行目:

$(a \leqq s \leqq b, |s| \leqq \varepsilon) \Rightarrow (a \leqq s \leqq b, |t| \leqq \varepsilon)$

■第 III 章

137 ページ，10–11 行目:

さて，多様体 S が向きづけられており，さらにリーマン計量 3) ds^2 が与えられているとき，(S, ds^2) を**リーマン多様体という．**

⇒ さて，多様体 S が向きづけられており，さらにリーマン計量 3) ds^2 が与えられているとき，(S, ds^2) を**向きづけられたリーマン多様体という．**

139 ページ 3 行目:

$C^\infty(S) \Rightarrow C^\infty(U)$

141 ページ 4 行目:

問題 2 ⇒ 問題 3

141 ページ 11 行目:

面積要素 $d\hat{A}$ は第一基本量を用いて ⇒ 面積要素 $d\hat{A}$ は ds^2 の成分を用いて

142 ページ 12 行目:

$d\omega_1 = a(\omega_1 \wedge \omega_2)(= a\, d\hat{A}), \qquad d\omega_2 = b(\omega_1 \wedge \omega_2)(= b\, d\hat{A})$

⇒ $d\omega_1 = a(\omega_1 \wedge \omega_2), \qquad d\omega_2 = b(\omega_1 \wedge \omega_2)$ （$a\, d\hat{A}$, $b\, d\hat{A}$ を削除）

142 ページ，16–18 行目:

S が向き付けられている場合には $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を正の向きの正規直交基底にとることにより，$d\hat{A}$ を S 全体で定義された面積要素の U 上への制限とみなすことができる．

⇒ S が向き付けられている場合には，S 全体で定義された面積要素 $d\hat{A}$ をとることができ，とくに $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を正の向きの正規直交基底にとると，$d\hat{A} = \omega_1 \wedge \omega_2$ となる．

142 ページ，下から 5 行目:

S の正規直交基底の場 ⇒ U の正規直交基底の場

143 ページ 10 行目:

接続形式 $\tilde{\mu}$ は ⇒ 上の $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ に関する接続形式 $\tilde{\mu}$ は

150 ページ 8 行目:

領域 D ⇒ 有界閉領域 D

152 ページ，一番下:

$V \leftrightarrow W \Rightarrow V \leftrightarrow \hat{V}$

153 ページ 12 行目:

$= df(X)\widehat{Y} + f\widehat{\nabla_X Y} \Rightarrow = df(X)Y + f\nabla_X Y$

153 ページ，下から 3 行目:

$(U; u, v) \Rightarrow \bigl(U; (u, v)\bigr)$

158 ページ 14 行目:

$(U_j; u_j, v_j) \Rightarrow \bigl(U_j; (u_j, v_j)\bigr)$

161 ページ，例 14.3 を次で差し替え:

$\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を 2 つの開集合

$$U_1 := \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(u,0) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, u \geqq 0\}, \qquad U_2 := \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(u,0) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, u \leqq 0\}$$

の和集合と考える．U_1 上の 2 つのベクトル場を

$$\begin{aligned} Y_1 &:= \left(u + \sqrt{u^2+v^2}\right)\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}, \\ Z_1 &:= \left(u + \sqrt{u^2+v^2}\right)\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} \end{aligned} \tag{14.3}$$

で定め，U_2 上の 2 つのベクトル場を

$$\begin{aligned} Y_2 &= -v\frac{\partial}{\partial u} + \left(u - \sqrt{u^2+v^2}\right)\frac{\partial}{\partial v}, \\ Z_2 &= v\frac{\partial}{\partial u} + \left(u - \sqrt{u^2+v^2}\right)\frac{\partial}{\partial v}, \end{aligned} \tag{14.4}$$

と定める．いま，

$$\begin{aligned} &Y_2 = -v\frac{\partial}{\partial u} - \frac{v^2}{u+\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial}{\partial v} \\ &= -\frac{v}{u+\sqrt{u^2+v^2}}\left(\left(u+\sqrt{u^2+v^2}\right)\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right) = -\frac{v}{u+\sqrt{u^2+v^2}}Y_1 \end{aligned}$$

であることに注意すると，$\eta := \{(U_j, Y_j)\}_{j=1,2}$ は $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の射影的ベクトル場を定める．同様に $Z_2 = \{v/\bigl(u+\sqrt{u^2+v^2}\bigr)\}Z_1$ が $U_1 \cap U_2$ 上で成り立つので，$\zeta := \{(U_j, Z_j)\}_{j=1,2}$ も $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の射影的ベクトル場を定める．図 14.2 の左側は η が生成する流れを，右側は ζ が生成する流れを表したものである． ♢

163 ページ，一番下:

$\xi_1 = \{(U_1, X_1), (U_1, X_2^{\perp})\}, \qquad \xi_2 = \{(U_2, X_1^{\perp}), (U_2, X_2)\}$

$\Rightarrow \qquad \xi_1 = \{(U_1, X_1), (U_2, X_2^{\perp})\}, \qquad \xi_2 = \{(U_1, X_1^{\perp}), (U_2, X_2)\}$

165 ページ 9 行目:

例 14.2 ⇒ 例 14.3

176 ページ，下から 7 行目:

$(a, b, c, d \in \boldsymbol{R};\ ad - bc \neq 0) \Rightarrow (a, b, c, d \in \boldsymbol{R};\ ad - bc = 1)$

182 ページ，下から 4 行目:

平均曲率が一定なはめ込み $p : S \to \boldsymbol{R}^3$ ⇒ 平均曲率が 0 でない定数であるはめ込み p

182 ページ，下から 3 行目:

平均曲率が一定なので ⇒ 平均曲率が 0 でないので

188 ページ 1 行目:

リーマン多様体 S ⇒ リーマン多様体 (S, ds^2)

189 ページ 6 行目:

リーマン多様体 S ⇒ リーマン多様体 (S, ds^2)

■付録 B

213 ページ，下から 9 行目:

曲線族 $\{C_t\}$ が陰関数 $F(x, y, t) = 0$ で与えられているなら，方程式

⇒ 曲線族 $\{C_t\}$ が特異点をもたない陰関数 $F(x, y, t) = 0$ で与えられているなら，

213 ページ，下から 7 行目:

包絡線を与える． ⇒ 包絡線の候補を与える．

213 ページ，下から 6 行目:

したり，あるいは x, y を t について解けばよい．

⇒ したり，x, y を t について解けばよい．$F_y \neq 0$ として一般性を失わない．

214 ページ 2 行目:

各 t で C_t に接し，包絡線になる． ⇒ 各 t で 曲線族 に接し，包絡線の候補になる．

214 ページ，6–8 行目:

これより t を消去して

$$(x - y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0$$

となる．したがって図 B-1.1 左の包絡線は包絡線であることがわかる．

⇒ これより t を消去して $(x - y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0$ となる．したがって図 B-1.1 左の包絡線は包絡線であることがわかる．ただし $F(x, y, t) = x + t^3$ など，この方法で求まるものは必ずしも包絡線とは限らない．

254 ページ 2 行目:

p_v の第三成分：$\beta + 2$ ⇒ $(\beta + 2)/2$

254 ページ 4 行目:

(B-8.9) 式：$\nu := \dfrac{1}{\alpha^2}(\ldots$ ⇒ $\nu := \dfrac{1}{\alpha}(\ldots$

254 ページ 8 行目:

$\lambda = \det(p_u, p_v) =$ ⇒ $\lambda = \det(p_u, p_v, \nu) =$

255 ページ 5 行目:

$\nu_\eta = \nu_v$ の第三成分：$2u\cosh v(\alpha - 2) \Rightarrow 2u\cosh v(2 - \beta)$

■解答

267 ページ，§1 の問題 3 の 3 行目:

$8/9 \Rightarrow 2\sqrt{2}/3$

267 ページ，§1 の問題 3 の 5 行目:

$\dfrac{27}{256}\varepsilon^4 \Rightarrow \dfrac{27\sqrt{2}}{256}\varepsilon^4$

271 ページ 10 行目:

$(\dot\gamma, \ddot\gamma$の一次結合$) + \dfrac{\ddot\gamma}{|\dot\gamma|^3} \Rightarrow (\dot\gamma, \ddot\gamma$の一次結合$) + \dfrac{\dddot\gamma}{|\dot\gamma|^3}$

271 ページ 14 行目:

フルネの公式 ⇒ フルネ・セレの公式

271 ページ，§5 問題 7 の解答:

γ を原点中心，半径 r の球面上の曲線とする．$\gamma\cdot\gamma = r^2$ なので，弧長パラメータをとり微分すると $\gamma'\cdot\gamma = 0$，$\gamma''\cdot\gamma = -1$．これより $\gamma = (-1/\kappa)\boldsymbol{n} + a\boldsymbol{b}$ と書ける．とくに $a^2 = r^2 - \kappa^2$ となり定数だから，$\boldsymbol{e} = \gamma' = -(1/\kappa)\boldsymbol{n}' + a\boldsymbol{b}'$．これにフルネ・セレの公式を適用すると捩率が 0 となることがわかる．

273 ページ，§7 の問題 7:

$E = \dot x^2 + \dot y^2 \to E = \dot x^2 + \dot z^2$

274 ページ 8 行目:

$R(AB)R^{-1} = RR^{-1}R^{-1}BR^{-1} = R^{-1}BR^{-1}$ であるが R^{-1} も B も

$\Rightarrow R^{-1}(AB)R = R^{-1}R^2BR = RBR$ であるが R も B も

277 ページ，下から 4 行目:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{|\dot\gamma|}\right)\dot\gamma + \frac{\ddot\gamma}{|\dot\gamma|} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{|\dot\gamma|}\right)\dot\gamma + \frac{\ddot\gamma}{|\dot\gamma|^2}$$

278 ページ，下から 11 行目:

$0 = \gamma\cdot\gamma + \gamma\cdot\gamma'' \quad \Rightarrow \quad 0 = \gamma'\cdot\gamma' + \gamma\cdot\gamma''$

282 ページ，下から 8 行目:

$F(x,y,t) = x\sin t + y\cos t - 2\sin t\cos t \Rightarrow F(x,y,t) = x\sin t + y\cos t - \sin t\cos t$

(2 をとる)

285 ページ 6 行目:

2. ⇒ 3. (問題番号)

285 ページ 17 行目:

3. ⇒ 4. (問題番号)

285 ページ，下から 7 行目:

$-2(6u^2 + v)(1 + u^2 + u^4) \Rightarrow -2(6u^2 + v)\sqrt{1 + u^2 + u^4}$

286 ページ 1 行目:

4. ⇒ 5. (問題番号)

286 **ページ** 6 **行目**:

5. ⇒ 6. (問題番号)

■参考文献

文献 [31]:

佐竹一郎 ⇒ 佐武一郎

■索引

293 **ページ，右の** 7 **行目**:

接触平面 tangent plane ⇒ 接触平面 osculating plane